IFSIC
INSTITUT DE FORMATION SUPERIEURE EN INFORMATIQUE et COMMUNICATION

Université de Rennes I

DIIC 1ère année

Examen

Maths Discrètes

Jeudi 7 novembre 2002
Durée : 2 heures
Documents de cours autorisés
Calculatrice interdite

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation

Exercice 1:

1. Traduire au moyen de prédicats les phrases suivantes :

(1) Aucun étudiant qui n'a pas le bac ne connait Lewis Carroll.
(2) Tous les étudiants sérieux viennent en TD.
(3) Aucun des étudiants qui ne connait pas Lewis Carroll ne passera en 2ème année de DIIC
(4) Seuls les étudiants qui n'ont pas le bac ne sont pas sérieux

2. Montrer que : "Seuls les étudiants qui viennent en TD passeront en 2ème année de DIIC"
[il est possible de méditer un moment sur cette conclusion... ☺]

3. Donner en français la négation de (4) sans commencer par "il est faux que..."

Exercice 2:

Soit E un ensemble quelconque, et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Pour tous A et B de $\mathcal{P}(E)$, on définit la *différence symétrique* de A et B par l'ensemble

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

1. Si A, B, et C sont trois parties de E, représenter sur un schema l'ensemble $A \oplus B$, puis $(A \oplus B) \oplus C$.
2. Montrer que l'opération $\oplus$ est associative.
3. Montrer que la relation binaire définie par : " $A \Re B \Leftrightarrow A \oplus B$ est un ensemble fini " est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$
4. Déterminer la classe de $\varnothing$
5. Déterminer la classe de E

Exercice 3:

Une loterie est organisée, avec 4 lots distincts à gagner. 100 tickets numérotés de 1 à 100 sont vendus à 100 personnes différentes, et un tirage au sort va désigner les 4 gagnants.

1. Combien y a-t-il de façons d'attribuer les lots ?
2. Même question sachant que la personne qui possède le ticket n° 47 gagne un des lots.
3. Même question sachant que les personnes qui possèdent les tickets nos 47 et 65 gagnent un des lots.
4. Même question sachant qu'au moins 2 des tickets gagnants se terminent par un zéro.

Exercice 4:

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.
Soit l'ensemble $E = \{2,3,4,5,...,p-2\}$

1. Rappeler pourquoi à chaque élément a de E est associé un unique élément b de E tel que $ab \equiv 1 \pmod p$
2. Soit f l'application $f: E \rightarrow E$
$a \rightarrow b$ tel que $ab \equiv 1 \pmod p$

   a. Montrer qu'aucun élément de E n'est invariant par f
   b. Pour tout a dans E, que vaut f(f(a)) ?

3. On a ainsi $\forall a \in E,\ a.f(a) \equiv 1 \pmod p$
Montrer que pour tout nombre $p \geq 5$, p premier $\Rightarrow (p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p$
4. Montrer que $\forall p \geq 5$, p premier $\Leftrightarrow (p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p$ *(théorème de Wilson)*
L'équivalence est-elle encore vraie si $0 < p < 5$?

Exercice 5:

Un seigneur, sentant sa fin proche, souhaite rassembler ses 12 enfants pour transmettre son héritage à l'amiable. Pensant faire un partage équitable entre ses enfants, il a au préalable fait changer toute sa fortune en Louis d'or, et il se trouve que le nombre de pièces obtenues lui permet de remplir exactement 12 sacs identiques. On admettra dans toute la suite que chaque sac destiné aux enfants contient au moins 100 pièces.

1. La veille de l'entrevue avec ses enfants, le seigneur réalise qu'il ne va plus rien lui rester pour vivre. Il garde alors un des 12 sacs remplis pour lui, et refait un partage équitable. Il reste alors 7 pièces qu'il garde aussi pour lui.
Quelle est ici la valeur minimale (en nombre de pièces) de l'héritage pour chaque enfant ?

2. Mais pris de remords, il garde seulement 12 pièces pour lui, et refait le partage initial avec la totalité des pièces restantes. Les enfants arrivent, et c'est alors que deux d'entre eux, estimant qu'ils avaient contribué à la constitution du patrimoine, réclament le double de la part de leurs frères et sœurs. Tous étant d'accord, le partage est refait.
Déterminer alors le nombre minimal de pièces par sac pour chacun des 10 autres enfants dans les deux cas suivants :
   a. le nouveau partage tombe juste
   b. il reste 8 Louis d'or

Expliquer pourquoi il ne peut pas rester 9 Louis d'or.