

EXAMEN

- I. J'ai constaté trente-six fois, et donc définitivement établi que
- (A) si je gagne, c'est que j'ai de la chance ou que je n'ai pas pris d'aspirine ;
 - (B) quand je suis malade, je prends de l'aspirine, mais je perds.
- Puis-je en déduire (séparément) que
- (C) si je suis malade, c'est parce que j'ai gagné ?
 - (D) quand je prends pas d'aspirine, je ne suis pas malade ?
- II. Un écureuil se déplace dans une grille tridimensionnelle. Ses mouvements le déplacent d'une maille vers l'est, ou vers le nord, ou vers le haut. Partant d'un point origine, il doit atteindre une noisette placée p mailles à l'est, q mailles au nord et r mailles en haut. Combien de trajets différents peut-il prendre ? Et dans le cas particulier : $p = 4, q = 3, r = 5$?
- III. L'algorithme d'Euclide donné en cours pour le calcul du pgcd calcule ligne par ligne les restes via $r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1}$ ($i > 0$) et même récurrence pour u_i et v_i vérifiant $r_i = r_0 u_i + r_1 v_i$.
- 1) Que vaut $u_{i+1} v_i - u_i v_{i+1}$? Qu'en déduisez vous pour les entiers u et v fournis par l'algorithme d'Euclide du cours et tels que $\text{pgcd}(r_0, r_1) = r_0 u + r_1 v$?
 - 2) On pousse l'algorithme jusqu'au premier reste r_{i+1} nul. Montrez que dans ce cas, l'égalité $r_{i+1} = r_0 u_{i+1} + r_1 v_{i+1}$ fournit un plus petit commun multiple de r_0 et r_1 . Quel avantage a cette méthode par rapport au calcul de $r_0 r_1 / \text{pgcd}(r_0, r_1)$?
- IV. Quel est le reste de la division par 24 de 350^{350} ?