Université de Rennes I
IFSIC – DIICI — ANAB

20 janvier 2004
Durée : 3 h

EXAMEN

Seul document autorisé : le cours.

Exercice 1

Quels sont les domaines de convergence des séries de Laurent $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$ et $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{\operatorname{ch} n}$?

Exercice 2

Calculez l'intégrale $\mathrm{I}(a,b) = \int_{|z|=r} dz/\big((z-a)^n(z-b)\big)$ pour $|a| < r < |b|$

a) au moyen du théorème des résidus ;
b) au moyen de la formule de Cauchy généralisée.

Exercice 3

Calculez l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-\cos\theta+\sin\theta}$$

(on rappelle que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont définis à l'aide de $e^{i\theta} = z$).

Exercice 4

a) Calculez l'intégrale suivante au moyen du théorème des résidus :

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_{\mathrm{R}} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \qquad a, b > 0 \ a \neq b.$$

b) Calculez cette intégrale lorsque $a = b$ avec le théorème des résidus.
c) Sans calcul complexe, sauriez-vous répondre au a) ? et au b) ?

Exercice 5

Soient p et q deux réels et n un entier, tous positifs. En intégrant la fonction $z^{n-1}e^{-z}$ sur le bord d'un secteur d'angle au sommet convenable, montrez les relations

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-px}\cos qx\,dx = \frac{(n-1)!\,\Re(p+iq)^n}{(p^2+q^2)^n}$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-px}\sin qx\,dx = \frac{(n-1)!\,\Im(p+iq)^n}{(p^2+q^2)^n}$$

($\Re z$ et $\Im z$ sont les parties réelle et imaginaire de z).