IFSIC
INSTITUT DE FORMATION SUPÉRIEURE en INFORMATIQUE et COMMUNICATION

Université de Rennes I

DIIC 1ère année

Examen

ANAB

Mardi 25 janvier 2005
Durée : 3 heures
Document de cours autorisé
Calculette interdite

Les exercices sont indépendants.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1: (3 points)

1. Déterminer le domaine de convergence (simple) de la série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z+2)^n}{4^n + 4^{-n}}$

2. Donner une partie de $\mathbb{C}$ sur laquelle il y a convergence uniforme.

Exercice 2: (3 points)

Pour tout complexe z, on note z=x+iy, avec x et y réels.

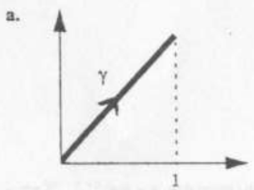
En quels points les fonctions suivantes sont-elles holomorphes ? (donner la plus grande partie de $\mathbb{C}$ sur laquelle chaque fonction est holomorphe).

1. $f(z) = x^2 + 2x - y^2 + 2iy(x+1)$
2. $g(z) = \log(z)$
3. $h(z) = \log|z|$

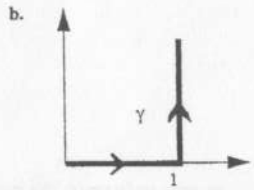
Exercice 3: (4 points) *les 2 questions sont indépendantes*

1. Calculer $\int_\gamma \mathrm{Re}(z)dz$ dans les deux cas suivants : (chemins de 0 à 1+i)

a.



b.



2. Calculer $\oint_C \frac{e^z}{(z+3)^2(z-1)}dz$:
   a. si (C) est le cercle $|z|=\frac{1}{2}$ parcouru dans le sens direct
   b. si (C) est le cercle $|z|=2$ parcouru dans le sens direct
   c. si (C) est le cercle $|z|=5$ parcouru dans le sens direct

Exercice 4: (4 points) *les 2 questions sont indépendantes*

1. Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin t}dt = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ pour tout réel a > 1

2. Calculer $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos \pi x}{x^2+4x+13}dx$

Exercice 5: (6 points)

On considère l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx$.

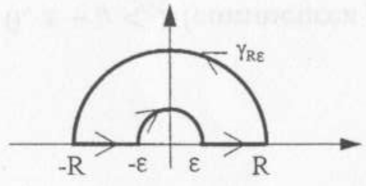
1. Montrer qu'elle converge.

2. Soit la fonction complexe $f(z) = \frac{\log z}{z^{1/2}(1+z^2)}$

On considère le contour $\gamma_{R\varepsilon}$ suivant :

On appelle Γ_R l'arc de $\gamma_{R\varepsilon}$ où $|z| = R > 1$

On appelle Γ_ε l'arc de $\gamma_{R\varepsilon}$ où $|z| = \varepsilon < 1$



a. Expliquer pourquoi/comment f peut être holomorphe sur le contour $\gamma_{R\varepsilon}$

b. Appliquer le théorème des résidus pour exprimer $\oint_{\gamma_{R\varepsilon}} f(z)dz$

c. Donner une autre expression de $\oint_{\gamma_{R\varepsilon}} f(z)dz$ en décomposant le chemin $\gamma_{R\varepsilon}$

3. a. Déterminer $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz$

b. Déterminer $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz$

c. Exprimer log(-z) en fonction de log(z)

d. Exprimer $(-z)^{1/2}$ en fonction de $z^{1/2}$

4. En déduire finalement que $I = \frac{-\pi^2}{2\sqrt{2}}$

CHAP 7