IFSIC
INSTITUT DE FORMATION SUPÉRIEURE en INFORMATIQUE et COMMUNICATION

Université de Rennes I

DIIC 1ère année

Contrôle continu n°3
MAT1

Jeudi 19 janvier 2006
Durée : 2 heures
Polycopié de cours autorisé
Calculette interdite

Les exercices sont indépendants.
Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1: (3,5 points)

Soit f la fonction de IR dans IR définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -\dfrac{\cos 2\pi x}{\pi^2 x^2} + \dfrac{\sin 2\pi x}{2\pi^3 x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = \dfrac{4}{3} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Cette fonction est-elle :

- continue ?
- infiniment dérivable ?
- sommable ?

(justifier les réponses)

Exercice 2 : (2,5 points)

Soit la fonction $f(z) = \dfrac{1}{1-z} e^{\frac{1}{z}}$

1. Donner les points singuliers de f, et leur nature.
2. Calculer le résidu de f en ces points

Exercice 3 : (3 points)

Donner le plus grand domaine de $\mathbb{C}$ sur lequel les fonctions suivantes sont holomorphes :

1. $g(z) = \log|z+1|$
2. $h(z) = \log(z+1)$

   Peut-on calculer Res (h , 0) ? (si oui que vaut-il ?)
   Peut-on calculer Res (h , -1) ? (si oui que vaut-il ?)

CHAP 7

Exercice 4 : (5 points) *les 3 questions sont indépendantes*

1. Calculer $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}dz$

2. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}dx$

3. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$

Exercice 5 : (6 points)

Soit a et b deux réels strictement positifs distincts.

On veut calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}dx$

1. Montrer qu'elle converge.

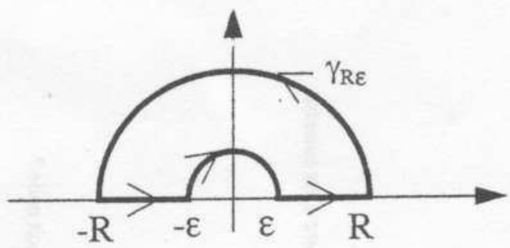
2. Soit la fonction complexe $f(z) = \dfrac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}$

On considère le contour $\gamma_{R\varepsilon}$ suivant :

On suppose $R > \varepsilon > 0$

On appelle Γ_R l'arc de $\gamma_{R\varepsilon}$ où $|z| = R$

On appelle Γ_ε l'arc de $\gamma_{R\varepsilon}$ où $|z| = \varepsilon$



a. Appliquer le théorème des résidus pour exprimer $\displaystyle\oint_{\gamma_{R\varepsilon}} f(z)dz$

b. Donner une autre expression de $\displaystyle\oint_{\gamma_{R\varepsilon}} f(z)dz$ en décomposant le chemin $\gamma_{R\varepsilon}$

3. a. Déterminer $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz$

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz$

4. En déduire la valeur de I

Chap 7