

CONTRÔLE N° 2

Ni documents ni calculettes ne sont autorisés.

Exercice 1

- Soit f une application $D \rightarrow \mathbf{R}$ où D est un ouvert de \mathbf{R}^n . Que signifie, par définition, que f est différentiable en un point P de D ?
- On prend $n = 2$, on choisit un point A du plan et on considère le carré scalaire $f(P) = AP \cdot AP$. Utilisez la définition de la différentielle pour calculer la différentielle de f en P . Quelle est la différentielle en P de la fonction $\|AP\| = \sqrt{AP \cdot AP}$?
- On fixe deux points A et B du plan et on considère la courbe définie par $g(P) = \|AP\| + \|BP\| = 2a$. Quelle est cette courbe ? Calculez la différentielle de g en P .
- Montrez que la tangente en P à la courbe est la bissectrice extérieure des demi-droites PA et PB (cette dernière question est facultative).

Exercice 2

- On considère la fonction $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\varphi(x) = \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(x) \cos^2 x$. Étudiez rapidement ses variations et tracez son graphe.
- Rappelez la définition d'une fonction continue en un point. La fonction φ est-elle continue ? de classe C^1 ? Calculez son intégrale sur \mathbf{R} .
- On pose $\delta_n(x) = (2n/\pi)\varphi(nx)$. Cette fonction est-elle continue ? de classe C^1 ? Calculez $\int_{\mathbf{R}} \delta_n(x) dx$.
- Soit $f(x)$ une fonction définie et continue de $[-1, 1]$ dans \mathbf{R} . La fonction $\delta_n(x)f(x)$ est-elle continue ? A-t-elle une limite en tout point quand n tend vers l'infini (on pourra discuter selon la valeur de $f(0)$) ? Calculez $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} \delta_n(x)f(x) dx$.

Exercice 3

- Calculez l'intégrale suivante :

$$I(a) = \int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad (0 < a)$$

- En décomposant la fraction rationnelle en une somme de fractions plus simples, montrez que l'intégrale $J(a, b)$ suivante vaut $\pi/(a + b)$:

$$J(a, b) = \int_{\mathbf{R}} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad (0 < a < b)$$

- On fait tendre b vers a . L'intégrale tend-elle vers $\pi/2a$ (justifiez votre réponse) ?