Université de Rennes 1 | 14 janvier 2008
DIIC1 – MAT1 | durée 2 heures

CONTRÔLE N° 2

Aucune calculette, aucun document n'est admis.

Exercice 1

a) Soit V un volume de $\mathbf{R}^n$, de valeur v. On fait une homothétie de rapport a de centre quelconque. Quel est le volume de l'image de V ?

b) Soit $\mathrm{B}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n;\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ la boule unité de $\mathbf{R}^n$, de volume b_n. On la coupe par le plan «horizontal» $x_n = h$. Quel est le volume de l'intersection ?

c) On veut calculer b_n par récurrence. Montrez que pour $n \geq 2$, on a

$$b_n = 2b_{n-1} \int_0^1 (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dh.$$

d) On rappelle qu'en notant $\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$, on a montré en exercice que $\mathrm{I}_1 = 1$ et $\mathrm{I}_n \mathrm{I}_{n-1} = \pi/2n$. Déduisez-en

$$b_n = 2^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{n(n-2)\cdots}$$

où le produit $n(n-2)\cdots$ s'arrête à 2 si n est pair, à 1 si n est impair, et $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne le quotient entier de n par 2.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrez que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

en intégrant la fonction $1/(1+z^n)$ sur le bord du secteur compris entre l'origine et l'arc de cercle $\mathrm{R}e^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi/n]$ (paramétrer soigneusement les trois parties de ce bord).

Exercice 3

a) Étant donné une fonction f holomorphe au voisinage d'un point complexe a, donnez la définition précise de «a est un zéro de multiplicité p de f». Si f est holomorphe au voisinage de a, sauf peut-être en a, donnez une définition précise de «a est un pôle de multiplicité p de f».

b) Définissez précisément le résidu au point a d'une fonction f holomorphe au voisinage de a sauf peut-être en a.

c) Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un point a, sauf peut-être en a. Déterminez le résidu en a de $\dfrac{df}{f}$.

d) Soit f une fonction méromorphe au voisinage d'un compact K du plan complexe n'ayant ni zéro ni pôle sur le bord de K. Montrez que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathrm{K}} \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \mathrm{Z} - \mathrm{P}$$

où Z est le nombre de zéros de f dans K (comptés avec leur multiplicité) et P le nombre de pôles de f dans K (comptés avec leur multiplicité).