

## Contrôle continu n°2 en Mathématiques

ESIR, semestre 1, année 2011-2012

(aucun document n'est autorisé)

On rappelle le développement limité en 0 de fonctions usuelles :

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Etudiez les suites de fonctions définies ci-dessous en termes de convergences simple et uniforme.

1. Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions définies pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{n(x^2-3x+2)}$$

Identifiez l'intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  sur lequel la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement mais non uniformément. Justifiez votre réponse.

Le polynôme  $x^2 - 3x + 2$  admet pour racines 1 et 2, on en déduit que ce polynôme est négatif sur l'intervalle  $[1, 2]$  et strictement positif sur l'ensemble  $]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$ . On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \text{ ou } x = 2 \\ 0 & \text{si } x \in ]1, 2[ \\ +\infty & \text{si } x \in ]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[ \end{cases}$$

Par conséquent, la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur l'intervalle  $[1, 2]$  et ce vers la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in [1, 2], \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \text{ ou } x = 2 \\ 0 & \text{si } x \in ]1, 2[ \end{cases}$$

D'autre part, les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $[1, 2]$  alors que  $f$  ne l'est pas. De ce fait, la suite de fonctions  $(f_n)$  ne converge pas uniformément sur  $[1, 2]$ .

2. Soit  $(g_n)$  la suite de fonctions définies pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \left(1 + \frac{2x^2}{n}\right)^n$$

Vers quelle fonction  $g$  la suite de fonctions  $(g_n)$  converge-t-elle simplement sur  $\mathbb{R}$  ?

On a pour tout  $x$  fixé de  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}g_n(x) &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{2x^2}{n}\right)\right) \\g_n(x) &= \exp\left(n\left(\frac{2x^2}{n} - \frac{2x^4}{n^2} + \frac{x^4}{n^2} \varepsilon\left(\frac{x^2}{n}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

D'où, pour tout  $x$  fixé de  $\mathbb{R}$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \exp(2x^2) = g(x)$$

Démontrez l'inégalité  $\ln(1 + X) \leq X$  pour tout  $X$  appartenant à  $\mathbb{R}^+$  (indication : démontrez que  $\sup\{k(X)\} = 0$  sur  $\mathbb{R}^+$  où  $k(X) = \ln(1 + X) - X$ ).

On a pour tout  $X$  de  $\mathbb{R}^+$  :

$$k'(X) = (\ln(1 + X) - X)' = \frac{1}{1 + X} - 1 = \frac{1}{1 + X} - \frac{1 + X}{1 + X} = -\frac{X}{1 + X} \leq 0$$

Par conséquent, la fonction  $k$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  et atteint son maximum en 0. On a alors :

$$\forall X \in \mathbb{R}, \quad k(X) \leq k(0)$$

Par définition de  $k$ , on a  $k(0) = 0$  et :

$$\forall X \in \mathbb{R}^+, \quad \ln(1 + X) - X \leq 0$$

Et donc :

$$\forall X \in \mathbb{R}^+, \quad \ln(1 + X) \leq X$$

Démontrez l'égalité  $|g_n(x) - g(x)| = g(x) - g_n(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  (indication : utilisez l'inégalité démontrée précédemment).

On a pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :

$$g_n(x) - g(x) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{2x^2}{n}\right)\right) - \exp(2x^2)$$

Or d'après l'inégalité démontrée précédemment, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln\left(1 + \frac{2x^2}{n}\right) \leq \frac{2x^2}{n}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) - g(x) &\leq \exp(2x^2) - \exp(2x^2) \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) - g(x) &\leq 0\end{aligned}$$

Et donc :

$$|g_n(x) - g(x)| = g(x) - g_n(x)$$

Pourquoi la valeur de  $\sup\{|g_n(x) - g(x)|\}$  est-elle la même sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^+$  ?

Elle est identique sur ces deux intervalles car la fonction  $|g_n - g|$  est paire.

La suite de fonction  $(g_n)$  converge-t-elle uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ ? Vous pourrez être amené à exploiter le fait que l'exponentielle d'un nombre négatif est toujours inférieure ou égale à un.

Soit  $\ell = g - g_n$ . D'après les résultats précédents, on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{|g_n(x) - g(x)|\} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \{\ell(x)\}$$

Effectuons une étude de variations de la fonction  $\ell$  sur  $\mathbb{R}^+$  afin d'en déduire le sup sur ce même intervalle. Pour ce faire étudions le signe de la dérivée de  $\ell$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \ell'(x) &= \left( \exp(2x^2) - \left(1 + \frac{2x^2}{n}\right)^n \right)' \\ &= 4x \left( \exp(2x^2) - \left(1 + \frac{2x^2}{n}\right)^{n-1} \right) \\ &= 4x \left( \exp(2x^2) - \exp\left((n-1) \ln\left(1 + \frac{2x^2}{n}\right)\right) \right) \end{aligned}$$

Or d'après l'inégalité  $\ln(1 + X) \leq X$  pour tout  $X$  appartenant à  $\mathbb{R}^+$ , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \ln\left(1 + \frac{2x^2}{n}\right) \leq \frac{2x^2}{n}$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell'(x) \geq 4x \left( \exp(2x^2) - \exp\left(\frac{2x^2(n-1)}{n}\right) \right)$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell'(x) \geq 4x \exp(2x^2) \left( 1 - \exp\left(-\frac{2x^2}{n}\right) \right)$$

Or, comme l'exponentielle de tout nombre négatif est inférieure ou égale à un, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \exp\left(-\frac{2x^2}{n}\right) \geq 0$$

Par conséquent on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell'(x) \geq 0$$

Ce qui implique que la fonction  $\ell$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . On a alors :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{|g_n(x) - g(x)|\} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \{\ell(x)\} = +\infty$$

La suite de fonction  $(g_n)$  ne converge donc pas uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

3. Soit  $(h_n)$  une suite de fonctions définies sur l'intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . Sous quelles conditions, peut-on écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b h_n(x) dx \right) = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} (h_n(x)) dx$$

Deux théorèmes ont été donnés en cours permettant tous deux de conduire au résultat énoncé ci-dessus. Le premier théorème, étudié dans le cours sur les suites de fonctions, requiert comme hypothèses que i) les fonctions  $h_n$  soient toutes intégrables sur  $[a, b]$  au sens de Riemann et que ii) la suite de fonctions  $(h_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$ . Le second théorème, étudié quant-à-lui dans le cours de calcul intégral et portant le nom de théorème de Lebesgue (dit de convergence dominée), nécessite que les fonctions  $|h_n|$  soient toutes majorées par une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $[a, b]$  au sens de Lebesgue.