Contrôle continu n°1 en Mathématiques

ESIR, semestre 1, année 2012-2013

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifiez votre réponse.
La fonction f est continue en $(0,0)$ si et seulement si (ssi) f tend vers $f(0,0)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$. Or, en posant $x = \rho\cos(\theta)$ et $y = \rho\sin(\theta)$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \rho^2\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2 \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'énoncé, on a $f(0,0) = 0$. Par conséquent, la fonction f est bien continue en $(0,0)$.

2. Calculer des dérivées partielles d'ordre 1 de f, tout d'abord en $(x,y) \neq (0,0)$, puis en $(x,y) = (0,0)$.
Les dérivées partielles d'ordre 1 de f en $(x,y) \neq (0,0)$ valent :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}$$

En ce qui concerne les dérivées partielles d'ordre 1 de f en $(x,y) = (0,0)$, elles valent toutes deux 0. Pour le démontrer, il suffit de revenir à la définition première de la dérivée en termes de limite du taux d'accroissement, sachant qu'une dérivée partielle n'est autre qu'une dérivée par rapport à l'une des variables :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2\times 0^2}{h^2+0^2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 0 \end{aligned}$$

De même pour la dérivée partielle de f par rapport à y en $(x, y) = (0, 0)$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^2\times h^2}{0^2+h^2} - 0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 0
\end{aligned}$$

3. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$? Justifiez votre réponse.
   D'après l'un des théorèmes du cours, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$ ssi toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues en $(0, 0)$. Or c'est bien le cas pour la fonction f donnée dans l'énoncé du contrôle. En effet, en posant $x = \rho\cos(\theta)$ et $y = \rho\sin(\theta)$, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \lim_{\rho\to 0} 2\rho\cos(\theta)\sin(\theta)^4 \\
&= 0 \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)
\end{aligned}$$

   et :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \lim_{\rho\to 0} 2\rho\cos(\theta)^4\sin(\theta) \\
&= 0 \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)
\end{aligned}$$

   La fonction f de l'énoncé est par conséquent de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$ et donc différentiable en $(0, 0)$.