UNIVERSITE DE RENNES 1 25 janvier 2001
Magistère matériaux 1ère année

Méthodes mathématiques (Durée 2H, calculatrice et cours manuscrit autorisés)

Exercice 1 :

On note S_n le groupe des permutations de $\{1,2,\ldots,n\}$ muni de la composition des applications (notée $\circ$). Si p et q sont deux nombres entiers compris entre 1 et n, on note (p,q) la transposition qui échange p et q sans modifier les autres nombres.

$(i+1, i)$

1) calculer : $\begin{matrix}(i,i+1)\circ(i+1,i+2)\circ(i,i+1) \\ (i,i+1)\circ(i+1,i+2)\circ(i+2,i+3)\circ(i+1,i+2)\circ(i,i+1)\end{matrix}$ $\quad i\in\{1,\ldots,n-3\}$.

2) On note P l'ensemble des n-1 transpositions : (1,2), (2,3), ..., (n–1,n). En généralisant les formules du 1) expliquez comment on peut écrire une transposition quelconque $(i,i+k)$ comme produit d'éléments de P (on dit alors que P engendre S_n). *Dans cette question, on ne donnera pas de démonstration.*

3) On considère la transposition : $t = (1, 2)$ et le cycle : $s = (1, 2, \ldots, n)$ du groupe S_n. Calculer $s\circ t\circ s^{-1}$, $s^2\circ t\circ s^{-2}$ et en déduire $s^k\circ t\circ s^{-k}$ pour k entier quelconque.

4) Montrer que t et s engendrent S_n.

Exercice2 :

On note E_n l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n : $E_n=\left\{P(X)=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n,(a_0,a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\right\}$ muni de l'addition des polynômes et du produit d'un polynôme par un réel définis par :

$$P(X)=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n\ ,\ Q(X)=b_0+b_1X+\ldots+b_nX^n\ ,\text{ et }\lambda\in\mathbb{R}$$

$$P+Q(X)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+\ldots+(a_n+b_n)X^n\ ,\ \lambda\cdot P(X)=\lambda a_0+\lambda a_1X+\ldots+\lambda a_nX^n\ .$$

On note B la base canonique : $(1,X,X^2,\ldots,X^n)$ de E_n.

1) On considère l'application f définie par : $f:\begin{cases}E_n\to E_n\\ P(X)\mapsto P(X+1)\end{cases}$. Montrer que f est un endomorphisme et que, pour tout $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, les coordonnées de $f(X^k)$ dans B sont : $(C_k^0,C_k^1,\ldots,C_k^k,0,\ldots,0)$. Écrire la matrice M de f dans B.
2) Montrer que f est bijective et calculer la matrice de f^{-1}.
3) Résoudre, en fonction de $(b_0,b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ le système suivant :

$$\begin{cases}x_0+x_1+x_2+x_3\cdots\cdots\cdots\cdots+x_n=b_0\\ \qquad x_1+C_2^1x_2+C_3^1x_3+\ldots.+C_n^1x_n=b_1\\ \qquad\qquad x_2+C_3^2x_3+\ldots.+C_n^2x_n=b_2\\ \qquad\qquad\qquad\vdots\\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n=b_n\end{cases}$$

4) On utilise le produit scalaire sur l'espace E_n, défini par : $P \cdot Q = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$. Calculer $X^i \cdot X^j$ pour i et $j \in \{0, ..., n\}$. Montrer que $(1, \sqrt{3}(2X-1), \sqrt{5}(6X^2-6X+1))$ constitue une base orthonormée de E_2.

Exercice 3 :

On considère la fonction f périodique de période $a > 0$, définie par : $f(t) = \frac{t}{a}$ si $0 \leq t < a$.

1) Représenter graphiquement f.
2) On note comme d'habitude $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier réels de f. Calculer $a_0(f)$; montrer, en utilisant une intégration par parties, que $a_n = 0$ pour $n \geq 1$. Calculer les coefficients b_n.
3) Calculer les coefficients de Fourier complexes de f : $c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}$. En utilisant l'égalité de Plancherel, calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.