UNIVERSITE DE RENNES 1 21 janvier 2002
Magistère matériaux 1[ère] année

Méthodes mathématiques (Durée 2H, calculatrice et cours manuscrit autorisés)

Exercice 1 :

Soit la matrice : $A=\begin{bmatrix} 5/8 & -\sqrt{3}/8 \\ -\sqrt{3}/8 & 7/8 \end{bmatrix}$

1) Calculer les valeurs propres de la matrice, est-elle diagonalisable ? Si oui dans quelle base ?
2) On note B' la base de vecteurs propres et D la matrice diagonale obtenue dans la base B'. Calculer D^n $(n \in \mathbb{N})$, quelle est la limite de D^n quand n tend vers l'infini ? En déduire la limite de A^n quand $n \to \infty$.

Exercice2 :

On considère la fonction définie sur $[0, a[$ par : $f(t)=\dfrac{t}{a}$.

1) On note f_1 la fonction obtenue en prolongeant f à $\mathbb{R}$ par périodicité de période a. Tracer le graphe de f_1 et rappeler le développement en série de Fourier de f_1 (il n'est pas utile de refaire le calcul).
2) On prolonge f à $]-a, a[$ de façon à obtenir une fonction impaire, la fonction ainsi obtenue est ensuite prolongée à $\mathbb{R}$ par périodicité de période $2a$. On appelle f_2 la fonction ainsi définie. Tracer le graphe de f_2 et calculer le développement en série de Fourier de f_2 (coefficients a_n et b_n).
3) On prolonge f à $]-a, a[$ de façon à obtenir une fonction paire, la fonction ainsi obtenue est ensuite prolongée à $\mathbb{R}$ par périodicité de période $2a$. On appelle f_3 la fonction ainsi définie. Tracer le graphe de f_3 et calculer le développement en série de Fourier de f_3 (coefficients a_n et b_n).
4) Ecrire l'égalité de Plancherel pour f_1, f_2 et f_3

Exercice 3 :

On note M_3 l'espace des matrices carrées réelles d'ordre 3, et S le sous ensemble des matrices symétriques de M_3.

1) Montrer que S est un sous espace vectorie

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{tr(A.A)}$$

fonction des coefficients de A et de B. Exprimer la norme (que l'on notera $\|\ \|$) associée au produit scalaire φ, en fonction des coefficients de A. Ce sont cette norme $\|\ \|$ et ce produit scalaire φ que l'on utilisera dans toute la suite.

4) On considère les ensembles :

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\},\ S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\},\ S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

et les 3 matrices :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Montrer que la famille (E_1, E_2, E_3) est orthogonale (pour le produit scalaire φ) et calculer la norme des E_i. Donner, pour chacun des sous espaces S_i, une base orthonormée.

5) La matrice A étant quelconque dans S, calculer successivement les projections de A sur S_1, S_2, et S_3 en fonction des coefficients de A.

6) Déterminer la projection de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ sur S_3 et déterminer la distance de A à S_3.

$$B = \left\langle A, \frac{E_1}{\|E_1\|} \right\rangle \frac{E_1}{\|E_1\|} + \left\langle A, \frac{E_2}{\|E_2\|} \right\rangle \frac{E_2}{\|E_2\|} + \left\langle A, \frac{E_3}{\|E_3\|} \right\rangle \frac{E_3}{\|E_3\|}$$