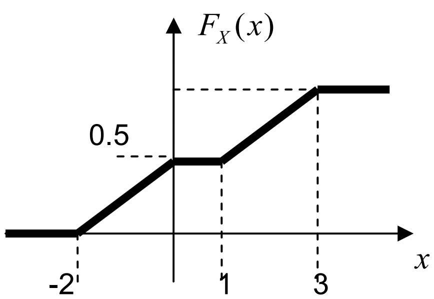
UNIVERSITE DE RENNES 1, ESIR1 Lundi 11 Janvier 2010

CC en **P**robabilités-**S**tatistiques

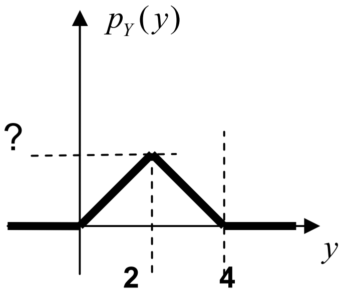
<u>Durée</u> : 2h
<u>Documents autorisés</u> : résumés pdf de cours distribués, 1 feuille A3 R+V notes personelles

<u>Exercice 1</u> (8 pts)

On considère deux VA (variables aléatoires) X et Y indépendantes (sur un même espace probabilisé (Ω, τ, P)). La fonction de répartition de la première et la densité de probabilité pour la seconde sont représentées en traits gras dans la figure ci-dessous.



Fonction de répartition pour X



Densité de probabilité pour Y

1) Donner,en les justifiant, les valeurs des probabilités:

$$P(X<0), P(X<1), P(1 \leq X<3), P(X>-1)$$

2) Préciser la valeur maximale pour $p_Y(y)$ et donner <u>l'allure</u> de la fonction de répartition $y \in \mathbb{R} \rightarrow F_Y(y)=P(Y<y)$ (on ne demande pas un calcul détaillé mais 1.5 point supplémentaire pourra être attribué pour la présentation de ce calcul).

3) Calculer les probabilités $P(\max(X, Y)<1)$ et $P(\min(X, Y) \geq 2)$.

4) Pourquoi peut-on dire que la VA X est de loi continue ?

CC en **P**robabilités-**S**tatistiques

Exercice 2 (6 pts)

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer simultanément une pièce de monnaie et un dé. Au résultat obtenu avec la pièce on associe une variable aléatoire X ($X=1$ si pile et $X=-1$ si face), et à celui obtenu avec le dé on associe une deuxième variable aléatoire Y ($Y=k$ si le dé montre la face $k, k=1,..,6$).

1) Pourquoi peut-on postuler que les VA X et Y sont indépendantes ? On donnera un argument 'physique', de bon sens.

2) Calculer les valeurs moyennes de X et de Y.

3) On introduit la VA Z définie comme étant égale au produit XY de X et de Y. Quelles sont les valeurs possibles pour Z ? Donner la distribution de probabilité pour Z sur cet ensemble de valeurs. En déduire $E(Z)$. Retrouver $E(Z)$ en utilisant les résultats de 2).

4) On pose $X_1=-X, Z_1=X_1Y$. Justifier l'égalité $E(ZZ_1)=-E(Y^2)$.

5) On pose $T=X+Y$. Donner la distribution de probabilité de T et sa moyenne. Comparer les probabilités $P(T \geq Y)$ et $P(T > Y)$.

Exercice 3 (6 pts)

1) Proposez un code Matlab permettant de générer 100 tirages indépendants d'une variable aléatoire suivant une même loi uniforme entre 1 et 3.

2) On se propose d'appliquer la méthode d'inversion de la fonction de répartition pour générer des nombres aléatoires suivant une loi exponentielle de paramètre a, de fonction de répartition $F(x)=\left(1-e^{-ax}\right)1_{[0,\infty[}(x), x \in \mathbb{R}$, sous la forme $X=h(U)$, où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\left[0,1\right]$.

2.1) Déterminer la fonction h.

2.2) Proposez alors un code Matlab permettant de générer 100 tirages indépendants de cette variable aléatoire.