

NOM:

PRENOM:

Durée: 1 h

Documents autorisés: 1 feuille recto-verso A3 (2xA4) de notes personnelles

EXERCICE 1

On utilise le code suivant (matlab) pour simuler des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X:

N = 10000;

X = sqrt (4 * rand (1,N)); % sqrt (x) calcule la racine carrée élément par élément

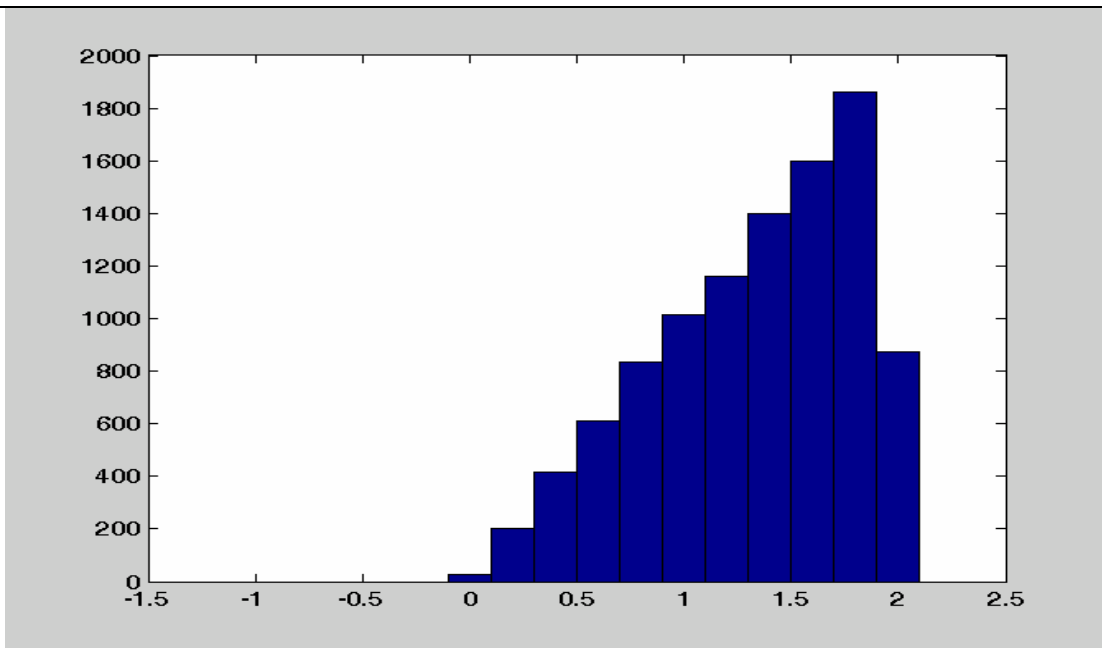
figure (1)

hist(X,-1:0.2:2) % -1:0.2:2 sont les valeurs des centres des classes

a = sum (X) / N

b = sum (X.^2) / N

Après une exécution on obtient les résultats reportés figure 1 .



a =
1.3332

b =
2.0017

Figure 1

Haut : figure(1) du programme

Bas : résultat dans fenêtre de commande

NOM:

PRENOM:

1) La loi de X est-elle gaussienne ? Uniforme ? Exponentielle ? D'un autre type ?

2) On considère une fonction de répartition

$$F(x) = x^2/4, x \in [0,2], F(x) = 1, x \geq 1, F(x) = 0, x \leq 0$$

2.1) Calculer la densité de probabilité $p(x), x \in \mathbb{R}$ correspondante, représentez la, et commenter l'histogramme de la figure 1.

2.2) Montrer que l'algorithme ci-dessus génère N réalisations indépendantes pour cette loi de probabilité par application de la méthode d'inversion.

2.3) Calculer la variance σ_X^2 pour cette loi et interpréter avec les résultats de la figure (1)

(bas).

EXERCICE 2

On lance une pièce de monnaie (suite d'essais mutuellement indépendants) jusqu'à obtenir 3 apparitions de "pile" (et pas une de plus), et on note X la VA (variable aléatoire) égale au nombre d'essais nécessaire pour y parvenir. La probabilité d'obtenir pile sur un essai est supposée égale à $p \in]0,1[$.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois le résultat "pile" sur $k - 1$ essais?

NOM:**PRENOM:**2) Donner la distribution de probabilité $P(X = k), k = 3, 2, \dots$ de la VA X .**EXERCICE 3**

Un médecin ouvre son cabinet en $t = 0$ et il prend en charge sans rendez-vous les patients dans l'ordre suivant lequel il se présentent dans la salle d'attente. On considère qu'il attend exactement N patients, qui arrivent indépendamment aux instants aléatoires T_1, \dots, T_N de même loi exponentielle de paramètre a , et que dès que le premier patient arrive, il est pris en charge immédiatement. Soit Y la date (aléatoire) de prise en charge de ce premier patient.

1) Exprimer Y en fonction de T_1, \dots, T_N (très simple).2) Montrer que $F_Y(y) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^N \{T_i \geq y\}\right)$ 3) Sachant que $p_{T_i}(x) = ae^{-ax}, x \geq 0$ (densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre $a \in \mathbb{R}^{+*}$), montrer que $P(T_i \geq x) = e^{-ax}, x \geq 0$.4) En déduire que la densité de probabilité de Y est exponentielle de paramètre $N\lambda$.