

**ESIR 1 - Matériaux**  
**Vibrations et ondes - contrôle continu**  
23 octobre 2013

Durée : 15' - Documents interdits - Calculatrice autorisée  
Cet examen comprend 5 questions pour un total de 20 points.

---

**Question 1** (2 points)

Qu'appelle-t-on l'approximation harmonique d'un système ?

**Solution:**

C'est l'approximation à l'ordre 2 (quadratique) de son énergie potentielle autour d'une de ses positions d'équilibre stable : par exemple  $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$  pour un système unidimensionnel.

**Question 2** (2 points)

Donner la définition précise d'un mode normal de vibration d'une molécule.

**Solution:**

Mouvement particulier de la molécule dans lequel tous les atomes oscillent de manière sinusoïdale à la même fréquence.

**Question 3** (4 points)

Combien de modes de vibration la molécule de benzène ( $C_6H_6$ ) possède-t-elle ? A l'équilibre, cette molécule est plane, contenue dans le plan  $P$ . Combien de modes de vibration compte-t-elle, qui n'impliquent que des déformations dans le plan  $P$  ?

**Solution:**

12 atomes, donc 36 modes. Les modes de déformation dans le plan n'impliquent que des 2 coordonnées dans le plan  $P$ , d'où seulement  $2 \times 12 = 24$  modes.

**Question 4** (6 points)

Un cristal liquide smectique est une phase moléculaire au sein de laquelle les molécules ont une orientation privilégiée et en plus s'ordonnent en lamelles (c.f. figure 1). Dans une telle phase, une molécule est soumise à une énergie potentielle

$$E_p(z) = E_0 \left[ 1 - \cos^2 \left( \pi \frac{z}{L} \right) \right]$$

où  $z$  est la position de la molécule suivant l'axe perpendiculaire aux lamelles, et  $L$  la distance d'équilibre entre 2 lamelles.

Exprimer la fréquence de vibration harmonique  $f$  d'une molécule de masse  $m$  dans un tel potentiel en fonction des données du problème.

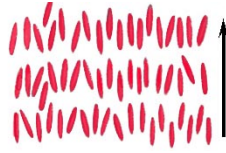


FIGURE 1 – Ordre moléculaire dans une phase smectique.

**Solution:**

$$\text{On a } k = \frac{\partial^2 E_p(z)}{\partial z^2} (z = 0) = \frac{2E_0\pi^2}{L^2}, \text{ d'où } f = \frac{\sqrt{2}}{2L} \sqrt{\frac{E_0}{m}}$$

**Question 5** (6 points)

On considère une molécule triatomique linéaire (comme  $CO_2$  par exemple). Dans l'approximation harmonique, la matrice des constantes de raideur pour cette molécule s'écrit :

$$[K] = k \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner l'expression de la force appliquée à l'atome numéro 2 de cette molécule, en fonction de  $k$  et des coordonnées  $x_i$  des trois atomes par rapport à leurs positions d'équilibre.

**Solution:**

$$|F\rangle = -[K]|X\rangle, \text{ d'où } F_2 = 2kx_1 - 3kx_2 + 2kx_3$$