

**Ondes et vibrations**

**Examen Terminal : 2 h**

**(Aide mémoire autorisé : 2 feuilles 21 x 29,7)**

---

**CHAINE DE MOBILES COUPLES**

**A) Chaîne de mobiles couplés de même masse :**

Une chaîne d'oscillateurs est constituée de mobiles identiques de masse  $M$  reliés par des ressorts de constante de raideur  $K$  et de longueur au repos  $a$ , astreints à se déplacer le long de l'axe  $ox$  (on posera  $\omega_0^2 = K/M$ ). A l'équilibre, les mobiles sont équidistants, de position

$x_{n0} = n.a$  où  $n$  est un entier variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Lorsque la chaîne est en mouvement,

l'abscisse du mobile «  $n$  » est  $x_n = x_{n0} + \psi_n(t)$

- I)
- 1) Etablir l'équation du mouvement du mobile indicé «  $n$  »
  - 2) On cherche des solutions de la forme  $\overline{\psi}_n(t) = Ae^{j(\omega t - nka)}$  en notation complexe.  $A$  est un réel. Etablir la relation de dispersion liant  $\omega$  et  $k$ .
  - 3) Pourquoi est-il possible de se limiter à l'intervalle  $-\pi/a < k < \pi/a$  (première zone de Brillouin) pour décrire les mouvements libres de la chaîne ? Représenter l'allure de la courbe  $\omega = f(k)$ . Indiquer à quoi correspond le changement  $k$  en  $-k$ .
  - 4) Préciser l'intervalle de pulsations où on pourra observer la propagation d'ondes progressives sinusoïdales sur la chaîne.
- II) On se limitera à une propagation dans le sens des  $x$  croissants.
- 1) Comment pouvez-vous déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe à partir de la courbe de dispersion ?
  - 2) { Comment se situe la vitesse de phase et la vitesse de groupe l'une par rapport à l'autre ?
  - 3) Commenter les comportements limites de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe lorsque  $k \rightarrow 0$  et  $k \rightarrow \pi/a$ . Préciser les types de mouvement observés.

III) On cherche maintenant des solutions à l'équation du mouvement sous la forme  $\overline{\psi}_n(t) = \overline{A}e^{j(\omega t - nka)}$  où  $A$  est une amplitude complexe. Par rapport au fait de prendre  $A$  réel, quelle modification introduisez-vous ? La relation de dispersion s'en trouve-t-elle modifiée ?

**B) Chaîne de mobiles couplés constituée de deux types de masses :**

La chaîne comporte maintenant deux types de mobiles de masse  $m$  et  $M$  avec  $m < M$  placées alternativement. Les masses considérées comme ponctuelles sont couplées par des ressorts identiques de raideur  $K$  et de longueur au repos  $a$ . Le système peut être décrit par une suite de mailles identiques repérées à l'aide de l'indice  $n$ , entier variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

