L3 PCMA - Magistère Matériaux
contrôle continu N°1 - corrigé

02 octobre 2007

1 Mouvement oscillatoire général

1. Quelles conditions doit-on vérifier pour que le mouvement d'une masse ponctuelle soumise à un potentiel quelconque soit oscillatoire ?

Il faut une position d'équilibre stable du système : il doit exister une position particulière x_{eq} telle que $\frac{\partial E_p}{\partial x}(x_{eq}) = 0$. Il faut de plus que l'énergie cinétique du système ne soit pas trop grande (afin qu'il reste près de sa position d'équilibre).

2 Potentiel anharmonique

Une masse ponctuelle m pouvant se déplacer sur un axe unique $(0x)$ est soumise à une énergie potentielle totale $E_p(x) = \frac{1}{2} U_0 \, tan^2(\alpha x)$. A $t = 0$ on donne à m une vitesse initiale $v_0 = \sqrt{\frac{U_0}{m}}$.

1. Quelle est la position d'équilibre du système ?

Le graphe de la fonction $tan(x)$ montre une fonction impaire, $tan^2(x)$ est donc paire avec un minimum en $x = 0$. Cette valeur correspond donc à l'équilibre stable.

1. Exprimer l'énergie mécanique E_m de la masse m.

$E_m = E_p + E_c$ *, elle se conserve, on a donc* $E_m = E_p(x = 0) + E_c(0) = 0 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{U_0}{2}$

1. Exprimer les bornes $\pm x_m$ de la trajectoire en fonction de α.

La trajectoire atteind une borne quand la vitesse s'annulle (avant que la masse ne reparte dans l'autre sens). En $x = x_m$ on a donc $E_c = 0$ et $E_m = E_p(x_m)$ soit $\frac{U_0}{2} = \frac{1}{2} U_0 \, tan^2(\alpha x_m)$, d'où $tan^2(\alpha x_m) = 1$ soit $\alpha x_m = Arctan(\pm 1)$ et finalement $x_m = \pm \frac{\pi}{4\alpha}$.

1. Exprimer[1] la période T du mouvement en fonction de U_0 et α.

On utilise la formule du cours :

$$T = \sqrt{2m} \int_{-x_m}^{x_m} \frac{dx}{\sqrt{E_m - E_p(x)}} = 2\sqrt{\frac{m}{U_0}} \int_{-\frac{\pi}{4\alpha}}^{\frac{\pi}{4\alpha}} \frac{dx}{\sqrt{1 - tan^2(\alpha x)}} = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{U_0}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\sqrt{1 - tan^2(u)}} = \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{U_0}} Arctan(\frac{\sqrt{2} tan(\frac{\pi}{4})}{\sqrt{1 - tan^2(\frac{\pi}{4})}})$$

[1] On donne $\int_{-x_m}^{x_m} \frac{du}{\sqrt{1 - \tan^2(u)}} = \sqrt{2} \arctan(\frac{\sqrt{2} \tan(x_m)}{\sqrt{1 - \tan^2(x_m)}})$

L'argument de la fonction Arctan tend vers l'infini, on a donc : $T = \frac{\pi\sqrt{2}}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{U_0}}$
.

1. Quelle propriété (inattendue pour un oscillateur anharmonique) vérifie cette période ?

Elle ne semble dépendre que de m *et des caractéristiques* U_0*et* α *du potentiel, mais pas de l'amplitude* x_m *du mouvement. Cette propritété est habituellement réservée aux oscillateurs harmoniques. (On verra dans les questions suivantes que ce n'est en fait qu'apparent). Il faudrait étudier d'autres conditions initiales pour pouvoir conclure.*

3 Approximation harmonique

On écarte cette fois à $t = 0$ la masse m (toujours soumise au même potentiel $E_p(x)$) d'une distance X_0 par rapport à sa position d'équilibre, et on l'abandonne sans vitesse initiale.

1. Quelle condition doit vérifier X_0 pour que le mouvement puisse être considéré comme celui d'un oscillateur harmonique ?

X_0*petit.*

1. Donner l'approximation harmonique de $E_p(x)$.

On peut calculer le développement limité de $E_p(x)$ *pour* x *près de 0, mais les dérivées successives de la fonction tan peuvent mener à des calculs comliqués. Il suffit de reconnaître que* $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$*, et qu'au premier ordre* $sin(x) \sim x$ *et* $cos(x) \sim 1$ *, soit* $tan(x) \sim x$ *. On applique ce résultat à* E_p *:* $E_p(x) \sim \frac{1}{2}\,U_0\,\alpha^2 x^2$.

1. En déduire la période T_0 des oscillations dans le cadre de cette approximation.

On voit que la forme trouvée est bien harmonique $E_p(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2$*, avec une constante de raideur effective* $k = U_0\,\alpha^2$*. On peut donc appliquer directement :* $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{U_0}}$.

1. Comparer cette expression avec celle établie à la question 2.1. Commenter.

On remarque que $T_0 = \sqrt{2}T$ *. Les deux périodes sont donc bien différentes. La période des oscillations ne dépend pas de l'amplitude* X_0 *tant que cette dernière reste petite et que l'approximation harmonique reste valable, mais elle diminue lorsque l'amplitude devient trop grande.*