Université de Rennes 1 1 décembre 2010

E.S.I.R. 2
MATI - Examen n°2 : Modélisation statistique des images

Durée : 2 heures, Documents non autorisés

Les deux parties sont indépendantes et peuvent donc être traitées dans n'importe quel ordre.

I Modèle d'Ising

1. **Modèle d'Ising isotrope.** On considère une image x en noir et blanc qu'on choisit de représenter comme un champ de Markov binaire (à valeurs dans $\{0, 1\}$). On choisit également de définir le voisinage par la 4-connexité et de ne tenir compte que des cliques d'ordre 2.

   Le modèle d'Ising isotrope définit un champ de Gibbs de la forme :

$$\mathbf{P}(x) = \frac{1}{Z} \exp\Big(-\sum_{\langle s,t \rangle} V(x_s, x_t)\Big)$$

   où la notation $\langle s, t\rangle$ indique que les pixels s et t sont voisins, et $x_s \in \{0, 1\}$ désigne la valeur de l'image x au pixel s.

   (a) Quel est le rôle du facteur $\dfrac{1}{Z}$? À quoi est-il égal ? Peut-on le calculer réellement en pratique ?

   (b) Supposons que le potentiel d'une clique d'ordre 2 est défini ainsi

$$V(0,1) = V(1,0) = \beta \ \text{ et } V(1,1) = V(0,0) = 0$$

   où β est un paramètre réel du modèle (le potentiel des cliques "singleton" est nul). Calculez, en fonction de β, l'énergie $H(x) = \sum_{\langle s,t \rangle} V(x_s, x_t)$ associée à chacune de ces 2 images.

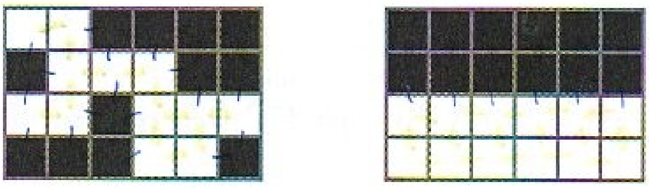
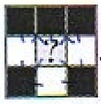
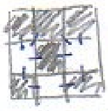


FIGURE 1 – Image n°1 (à gauche) et image n°2 (à droite)

(c) Laquelle de ces images est la plus probable (selon la loi $\mathbf{P}$ définie au dessus) ? Vous justifierez votre réponse en fonction de la valeur de β.

(d) Considérez la configuration locale suivante . 1β 13β  8β

Quelle est la valeur la plus probable (selon la loi $\mathbf{P}$ définie au dessus) du pixel central si $\beta > 0$? Quelle est la valeur la plus probable de ce pixel si on considère la 8-connexité ?

2. **Modèle d'Ising anisotrope.** On travaille maintenant en 8-connexité, mais toujours avec des cliques d'ordre 2. Les potentiels de ces cliques ne dépendent plus uniquement de la valeur de l'image en ces pixels mais également de la position de ces pixels (liaison horizontale, verticale ou diagonale).
On définit H ainsi :

$$H(x) = \beta_1 \sum_{\boxed{s\,|\,t}} \phi(x_s, x_t) \;+\; \beta_2 \sum_{\boxed{\substack{s\\t}}} \phi(x_s, x_t) \;+\; \beta_3 \sum_{\boxed{s}\,\boxed{t}} \phi(x_s, x_t) \;+\; \beta_4 \sum_{\boxed{t}\,\boxed{s}} \phi(x_s, x_t)$$

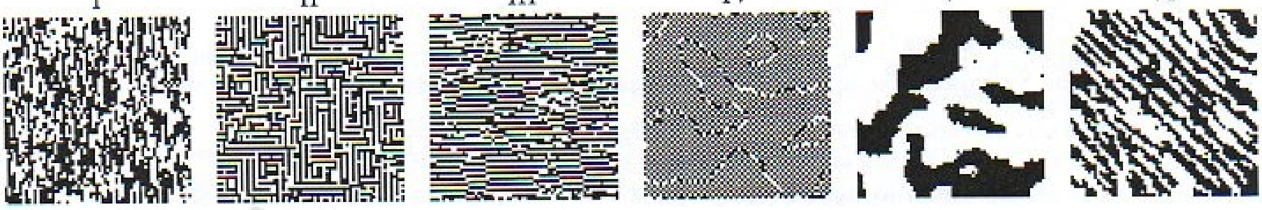
avec

$$\phi(x_s, x_t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_s = x_t \\ 1 & \text{si} \quad x_s \neq x_t \end{cases}$$

17 × 0,2 = 3,4   6 × 0,2 = 1,2

Indiquez (en justifiant rapidement votre réponse) quel jeu de paramètres est le plus susceptible de correspondre à chacun des six images suivantes, parmi les propositions ci-dessus :

I II III IV V VI



	A	B	C	D	E	F
$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$	(-1,-1,1,1)	(0,1,0,0)	(1,-1,0,0)	(1,1,-1,-1)	(1,1,1,-1)	(1,1,1,1)
	4	1	3	2	6	5

II Restauration d'une image binaire dégradée

Dans la suite on désigne par x une image binaire à valeurs dans $\{0, 1\}$. L'observation y est une version "dégradée" de cette image binaire x. y est également une image binaire à valeurs dans $\{0, 1\}$. La figure 2 montre deux exemples de telles paires d'images.

On nous donne deux informations :

homogène
irréductibles
apériodique
réversible => stationnaire

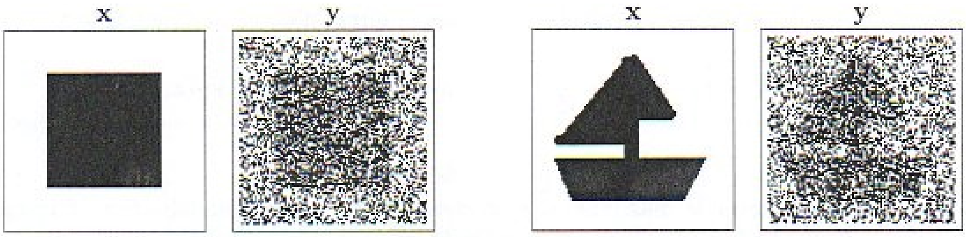


FIGURE 2 – Chaque image y est une version dégradée de l'image x correspondante.

(i) les images x considérées sont composées de "grandes" parties blanches et de "grandes" parties noires (elles sont donc relativement régulières).

(ii) La dégradation subie par x (pour obtenir y) correspond au processus suivant : la couleur de chaque pixel de x a été indépendamment inversée avec une certaine probabilité $p \in [0, 1]$. Par exemple si $p = \frac{1}{4}$, chaque pixel noir (resp. blanc) a une chance sur quatre de devenir blanc (resp. noir).

1. Étant donné une image x à laquelle on applique la dégradation décrite ci-dessus. Quelles images obtient-on si p est très petit ? très proche de 1 ? égal à $\frac{1}{2}$?

2. Étant donné une image y, on souhaite la restaurer. On veut donc obtenir une image qui soit proche de l'image x (inconnue) correspondante. On décide d'utiliser des outils statistiques.

   Rappel : Étant donné deux variables aléatoires X et Y, la règle de Bayes relie les probabilités conditionnelles de X *sachant* Y et de Y *sachant* X et peut s'écrire de la manière suivante :

   $$\mathbf{P}(\overset{S}{X}|\overset{I}{Y}) = \frac{\mathbf{P}(\overset{I}{Y}|\overset{S}{X})\mathbf{P}(\overset{S}{X})}{\mathbf{P}(\underset{I}{Y})}$$

   vraisemblance $p(I|S)$
   à priori $p(S)$

   $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)}$
   $P(Y|X) = \frac{P(X,Y)}{P(X)}$

   Expliquez en quoi cette règle est fondamentale en analyse bayésienne des images : dans le cas général, que peuvent représenter respectivement X et Y ? que modélisent les différentes probabilités présentes dans cette règle ? Laquelle nous intéresse et pourquoi ? Pourquoi doit-on passer par la règle de Bayes pour calculer cette probabilité ?

3. Dans le cas présent, que peut-on choisir comme probabilité à priori, $\mathbf{P}(X)$?

4. Étant donné deux images binaires x et y (quelconques), calculez la vraisemblance de l'observation y *sachant* x, $\mathbf{P}(Y = y \,|\, X = x)$ (c'est à dire la probabilité que l'image y soit obtenue par dégradation de l'image x selon le processus décrit précédemment et pour une certaine probabilité p). Cette probabilité sera donc donnée en fonction de x, y et p.

5. Montrez que la probabilité jointe $\mathbf{P}(X, Y) = \mathbf{P}(Y|X)\,\mathbf{P}(X)$ ainsi définie est un champ

de Markov. Vous écrirez cette probabilité sous la forme d'un champ de Gibbs :

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \frac{1}{Z} e^{-\mathcal{H}(x,y)} \quad \text{avec} \quad \mathcal{H}(x, y) = \sum_{C \in \mathscr{C}} V_C(x_C, y_C)$$

6. On souhaite trouver le *maximum a posteriori* associé à cette modélisation. Expliquez de quoi il s'agit. Pourquoi n'est-il pas utile de modéliser $\mathbf{P}(Y)$?

7. Pour calculer ce *maximum a posteriori*, on décide d'utiliser la méthode du recuit simulé. Supposons qu'on dispose déjà du code matlab suivant :

```
1  for k=1:n
2      for i=1:size(X,1)
3          for j=1:size(X,2)
4              Voisins = [  X(max(1,i-1),j)   X(min(end,i+1),j)
5                           X(i,max(1,j-1))   X(i,min(end,j+1))   ];
6              H1 = energie_locale(X(i,j), Y(i,j), Voisins,  beta, p);
7              xs = floor(2*rand());
8              H2 = energie_locale(xs, Y(i,j), Voisins,  beta, p);
9              if (H2<H1 || rand()<exp(H1-H2))
10                 X(i,j) = xs;
11             end
12         end
13     end
14 end
```

À quoi correspond le code ci-dessus ? Comment faut-il le modifier pour implémenter la méthode du recuit simulé ? Vous préciserez les changements nécessaires en indiquant les numéros de lignes correspondants.

8. **Rappel :** On désigne par "énergie locale", l'énergie associée à la probabilité conditionnelle locale $\mathbf{P}(X_s = x_s | X_{\partial(s)} = x_{\partial(s)})$ (où $\partial(s)$ contient les voisins du site s).
Le code précédent appelle une fonction `energie_locale` qui doit calculer l'énergie locale correspondante à l'énergie de la question 5. Expliquez pourquoi il suffit de calculer cette énergie locale (pourquoi n'a-t-on pas besoin de calculer l'énergie totale ?). Écrivez cette fonction.

9. Pour finir, on suppose que l'on ne nous donne plus la première information (i) (de régularité sur les images). Les images x à l'origine des observations y sont donc maintenant quelconques. Quel est la seule possibilité envisageable pour le modèle a priori $\mathrm{P}(X)$? Dans ce cas, que vaut le maximum a posteriori (en fonction de la valeur de p) ?

P(X) -> images aléatoires "bruitées"