

Les supports de cours ne sont pas autorisés ! Les questions sont indépendantes.

Rappels :

Transformation de Fourier discrète d'une image im de taille $N \times M$:

$$IM[u, v] = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} im[k, l] \exp\left(-j2\pi\left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right)$$

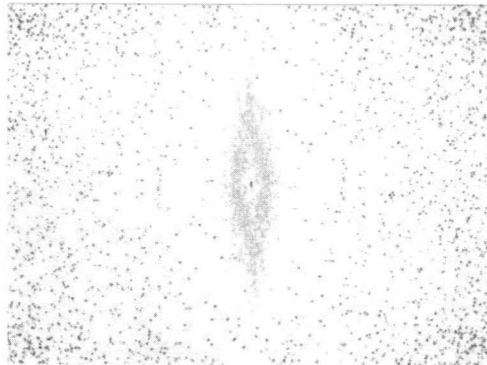
Transformation de Fourier discrète inverse :

$$im[k, l] = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} IM[u, v] \exp\left(j2\pi\left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right)$$

Laplacien de l'image im :

$$\nabla^2 im[k, l] = \frac{\partial^2 im[k, l]}{\partial k^2} + \frac{\partial^2 im[k, l]}{\partial l^2}$$

1. Citer trois propriétés importantes de la transformée de Fourier. Merci de les détailler en deux-trois lignes. (Barème indicatif 3 pts)
2. Soit une image naturelle et son spectre d'amplitudes représenté ci-dessous. Placer sur ce spectre la composante continue, les basses fréquences ainsi que les hautes fréquences.



Pouvez-vous donner le type d'image qui serait susceptible d'avoir ce type de signature spectrale ? (Barème indicatif 2 pts)

3. Démontrer que la transformation de Fourier discrète du Laplacien de l'image im est :

$$\nabla^2 im[k, l] \xrightarrow{\text{Fourier}} (2j\pi)^2 \left(\frac{u^2}{N^2} + \frac{v^2}{M^2}\right) IM[u, v]$$

avec IM la transformée de Fourier de l'image im (Merci d'indiquer les détails de la démonstration).

A partir de ce résultats, généraliser à l'ordre n , c'est-à-dire donner la transformée de Fourier de

$$\frac{\partial^n im[k, l]}{\partial k^n} + \frac{\partial^n im[k, l]}{\partial l^n}$$

(Barème indicatif 5 pts)

Correction : Montrer que $\nabla^2 im[k, l] \xrightarrow{\text{Fourier}} (2j\pi)^2 \left(\frac{u^2}{N^2} + \frac{v^2}{M^2} \right) IM[u, v]$

$$\nabla^2 im[k, l] = \frac{\partial^2 im[k, l]}{\partial k^2} + \frac{\partial^2 im[k, l]}{\partial l^2}$$

On remplace $im[k, l]$ par sa décomposition dans la base de Fourier $im[k, l] = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} IM[u, v] \exp\left(j2\pi \left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right)$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \nabla^2 im[k, l] &= \frac{\partial^2}{\partial k^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} IM[u, v] \exp\left(j2\pi \left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial l^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} IM[u, v] \exp\left(j2\pi \left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right) \end{aligned}$$

Comme la dérivée d'une somme correspond à la dérivée des termes de la somme, on a :

$$\begin{aligned} \nabla^2 im[k, l] &= \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} \frac{\partial^2}{\partial k^2} \left\{ IM[u, v] \exp\left(j2\pi \left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right) \right\} \\ &\quad + \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} \frac{\partial^2}{\partial l^2} \left\{ IM[u, v] \exp\left(j2\pi \left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right) \right\} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $\frac{\partial^2}{\partial k^2} \left\{ IM[u, v] \exp\left(j2\pi \left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right) \right\} = \left(j2\pi \frac{u}{N}\right)^2 IM[u, v] \exp\left(j2\pi \left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right)$ et $\frac{\partial^2}{\partial l^2} \left\{ IM[u, v] \exp\left(j2\pi \left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right) \right\} = \left(j2\pi \frac{v}{M}\right)^2 IM[u, v] \exp\left(j2\pi \left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right)$, par conséquent :

$$\nabla^2 im[k, l] = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} (j2\pi)^2 \left(\frac{u^2}{N^2} + \frac{v^2}{M^2} \right) IM[u, v] \exp\left(j2\pi \left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right)$$

On conclue que la transformée de Fourier de $\nabla^2 im[k, l]$ est :

$$\nabla^2 im[k, l] \xrightarrow{\text{Fourier}} (2j\pi)^2 \left(\frac{u^2}{N^2} + \frac{v^2}{M^2} \right) IM[u, v]$$

La généralisation à l'ordre n est immédiate.